Diferansiyel Denklemler - I Arasınav Cevap Anahtarı

A Grubu

① $(x-xy)dy + y^2dx = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x(y-1)} \Rightarrow \dfrac{y-1}{y^2}dy = \dfrac{dx}{x}$ değişkenlerine ayrılabilen denklemdir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int \frac{y-1}{y^2}dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y + \frac{1}{y} = \ln x + \ln c$$

$$\underline{y = cxe^{-\frac{1}{y}}}$$

genel çözüm

veya $\left.\begin{matrix} M_y = 2y \\ N_x = 1-y \end{matrix}\right\}$ $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{1-3y}{y^2}$ olup $\lambda(y) = \dfrac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^3}$

integral çarpanı olup bu yöntemle de çözülebilir.

② $(x^2+3y-x)dx + xdy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-x^2-3y}{x} \Rightarrow y' + \dfrac{3}{x}y = 1-x$ olup

$y' + P(x)y = Q(x)$ formunda olduğu için lineer denklemdir.

$\lambda(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = x^3$ olup genel çözüm

$$x^3 \cdot y = \int (1-x)x^3dx + c \Rightarrow \underline{x^3y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + c}$$ olur.

veya $\left.\begin{matrix} M_y = 3 \\ N_x = 1 \end{matrix}\right\}$ $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{3-1}{x} = \dfrac{2}{x}$ için $\lambda(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$ integral

çarpanı olup bu yöntemle de çözülebilir.

③ $(y + \sqrt{x^2-y^2})dx - xdy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \underbrace{\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}}_{f(x,y)}$ $f(tx,ty) = f(x,y)$

olduğu için denklem homojen olup denktir. $\underline{y = ux}$ dönüşümü ile $\underline{y' = u'x + u}$ değişkenlerine ayrılabilen denkleme

indirgenir.

$$u'x + u = \frac{ux + \sqrt{x^2 - u^2x^2}}{x} \Rightarrow u'x + \cancel{u} = \cancel{u} + \sqrt{1-u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{1-u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$$ D.A olur

$$\arcsin u = \ln x + c$$

$$\underline{\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + c}$$ genel çözümdür

CamScanner ile tarandı

④ $c^2x^2 - 2cy + 4 = 0$ eğri ailesinde bir keyfi sabit olduğu için bir kez türev alınırsa

$$2c^2x - 2cy' = 0 \Rightarrow 2c(cx - y') = 0$$

$c \neq 0$ ($c=0$ için $4=0$ gelişki) $\quad cx - y' = 0 \Rightarrow c = \frac{y'}{x}$ olup

$$c^2x^2 - 2cy + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y'}{x}\right)^2 x^2 - 2\frac{y'}{x}\cdot y + 4 = 0 \Rightarrow \underbrace{x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0}_{\text{dif denk}}$$

⑤ $(\underbrace{x^2y^2 - 2}_{M})dx + (\underbrace{P(x,y) + xe^y}_{N})dy = 0$ denklem tam dif denk olduğuna göre $M_y = N_x$ dir.

$M_y = 2x^2y \qquad N_x = P_x + e^y$ olup $M_y = N_x$ eşitliğinden

$2x^2y = P_x + e^y \Rightarrow P_x = 2x^2y - e^y$ olup x e göre kısmi integral alınırsa

$$P(x,y) = \int (2x^2y - e^y)\,dx + f(y)$$

$$P(x,y) = 2y\cdot\frac{x^3}{3} - xe^y + f(y)$$ olarak bulunur.

⑥ $x^3y' - (x^2+2x)y = x^2 + y^2 \Rightarrow y' - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)y = \frac{1}{x^3}y^2 + \frac{1}{x}$ olup

$y' + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$ formunda olduğu için Riccati dif denkdir

$y_1 = ax$ çözüm ise denklemi sağlar. Buna göre $y_1' = a$ olup

$$a - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)ax = \frac{1}{x^3}a^2x^2 + \frac{1}{x} \Rightarrow \cancel{a} - \cancel{a} - \frac{2a}{x} = \frac{a^2}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$y_1 = -x$ dır. $\quad y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = -x + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -1 - \frac{u'}{u^2}$ dönüşümü ile lineer denkleme indirgenir

$$\left(-1 - \frac{u'}{u^2}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\left(-x + \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{x^3}\left(-x + \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \cancel{-1} - \frac{u'}{u^2} + \cancel{1} - \frac{1}{xu} + \cancel{\frac{2}{x}} - \frac{2}{x^2u} = \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x^2u} + \frac{1}{x^3u^2} + \cancel{\frac{1}{x}}$$

$$-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{xu} = \frac{1}{x^3u^2} \Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x^3}$$ lineer denklemdir

$\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$ için lineer denklemin genel çözümü

$$x\cdot u = \int -\frac{1}{x^2}\cdot x\,dx + c \Rightarrow x.u = \frac{1}{x} + c$$ olur.

$y = -x + \frac{1}{u} \Rightarrow y + x = \frac{1}{u}$

$\Rightarrow u = \frac{1}{x+y}$

İstenen genel çözüm

$$\frac{x}{x+y} = \frac{1}{x} + c$$ olur.

CamScanner ile tarandı

Diferansiyel Denklemler - I - Arasınav Cevap Anahtarı

B Grubu

① $(2\sqrt{xy}-y)dx + xdy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \underbrace{\dfrac{y-2\sqrt{xy}}{x}}_{f(x,y)}$ $f(tx,ty)=f(x,y)$ olduğu

için denklem homojen dif denk.tir.

$y=ux$ için $y'=u'x+u$ olup denklem değişkenlerine ayrılabilir denkleme indirgenir

$u'x+u = \dfrac{ux-2\sqrt{x.ux}}{x} \Rightarrow u'x+\cancel{u} = \cancel{u}-2\sqrt{u}$

$\dfrac{du}{dx}.x = -2\sqrt{u} \Rightarrow \dfrac{du}{2\sqrt{u}} = -\dfrac{dx}{x}$ DA dur

$\sqrt{u} = -\ln x + c$

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\ln x + c$

genel çözüm

veya $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2\sqrt{x}}{x}.y^{\frac{1}{2}}$ yazılırsa

$n=\frac{1}{2}$ için Bernoulli denklemi olur.

$u = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow u = y^{\frac{1}{2}}$ dönüşümü ile lineer denkleme indirgenerekte

çözülebilir.

② $(x^2-2y+x)dx + xdy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y-x^2-x}{x} \Rightarrow y' - \dfrac{2}{x}y = -x-1$

olup $y'+P(x)y=Q(x)$ formunda olduğu için Lineer dif denk.tir.

$\lambda(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$ olmak üzere genel çözüm

$x^{-2}.y = \int x^{-2}(-x-1)dx + c \rightarrow \dfrac{y}{x^2} = -\ln x + \dfrac{1}{x} + c$ dur.

veya $M_y = -2$, $N_x = 1$, $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{-2-1}{x} = -\dfrac{3}{x} \Rightarrow \lambda(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = \dfrac{1}{x^3}$

integral çarpanı olup bu yöntemle de çözüm yapılabilir.

③ $e^x(2y^2+5)dy - (2xy+y)dx = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(2x+1)}{e^x(2y^2+5)}$

$\Rightarrow \dfrac{2y^2+5}{y} = \dfrac{2x+1}{e^x}dx$ değişkenlerine ayrılabilen dif denk

$\int\left(2y+\frac{5}{y}\right)dy = \int\left(2xe^{-x}+e^{-x}\right)dx$

$$\begin{array}{ll} x & e^{-x} \\ 1 & -e^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{array}$$

$y^2+5\ln y = 2(-xe^{-x}-e^{-x}) - e^{-x} + c$

$y^2+5\ln y = e^{-x}(-2x-3)+c$

genel çözümdür

CamScanner ile tarandı

(4) $cx^2+c^2y^2=1$ eğri ailesinde bir keyfi sabit olduğu için bir kez türev alırsak

$$2cx+2c^2y\cdot y'=0 \Rightarrow 2c(x+cyy')=0$$

$c\neq 0$ ($c=0$ için $0=1$ gelir) $\quad x+cyy'=0 \Rightarrow c=\frac{-x}{yy'}$ olup

$$cx^2+c^2y^2=1 \Rightarrow x^2\left(\frac{-x}{yy'}\right)+y^2\left(\frac{-x}{yy'}\right)^2=1 \Rightarrow \underline{x^2y-x^3y'=y(y')^2}$$

dif denk

(5) $(\underbrace{Q(x,y)+xy}_{M})dx+(\underbrace{3x^2y^2-y\sin x}_{N})dy=0$ tam diferansiyel denklem olduğuna göre $M_y=N_x$ dir.

$M_y=Q_y+x \qquad N_x=6xy^2-y\cos x$ olup $M_y=N_x$ eşitliğinden

$Q_y+x=6xy^2-y\cos x \Rightarrow Q_y=6xy^2-y\cos x-x$ olur. Buradan y ye göre kısmi integral alınırsa

$$Q(x,y)=\int(6xy^2-y\cos x-x)\,dy+f(x)$$

$$Q(x,y)=2xy^3-\frac{y^2}{2}\cos x-xy+f(x)$$ bulunur.

(6) $xy'+y=xy^2-\frac{1}{x} \Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=y^2-\frac{1}{x^2} \qquad y'+P(x)y=Q(x)y^2+R(x)$

formunda olduğu için Riccati dif denk'dir.

$y_1=\frac{a}{x}$ çözüm ise denklemi sağlar. $y_1'=-\frac{a}{x^2}$ olup

$x\left(\frac{-a}{x^2}\right)+\frac{a}{x}=x.\frac{a^2}{x^2}-\frac{1}{x} \Rightarrow \cancel{-a}+\cancel{a}=a^2-1 \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a=1,\ a=-1$

$a\in\mathbb{R}^+$ için $a=1$ olup $\underbrace{y_1=\frac{1}{x}}$ olur.

$y=y_1+\frac{1}{u} \Rightarrow \underline{y=\frac{1}{x}+\frac{1}{u}} \Rightarrow \underline{y'=\frac{-1}{x^2}-\frac{u'}{u^2}}$ dönüşümü ile lineer denkleme indirgenir.

$$\left(\frac{-1}{x^2}-\frac{u'}{u^2}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)^2-\frac{1}{x^2} \Rightarrow \cancel{\frac{-1}{x^2}}-\frac{u'}{u^2}+\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\frac{1}{u}=\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{xu}+\frac{1}{u^2}-\cancel{\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{-u'}{u^2}-\frac{1}{xu}=\frac{1}{u^2} \Rightarrow u'+\frac{1}{x}u=-1$$ lineer denklem

$\lambda(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$ için lineer denklemin genel çözümü

$$x\cdot u=\int -1.x\,dx+c \Rightarrow xu=-\frac{x^2}{2}+c$$ olur

$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{u} \Rightarrow y-\frac{1}{x}=\frac{1}{u}$ $\qquad$ istenen genel çözüm

$\frac{xy-1}{x}=\frac{1}{u} \Rightarrow u=\frac{x}{xy-1} \qquad \underline{x.\frac{x}{xy-1}=-\frac{x^2}{2}+c}$ olur.

CamScanner ile tarandı